Diskussion einer Abituraufgabe im Hinblick auf spezielle Ziele von Stochastikunterricht

Manfred Borovcnik, Klagenfurt; Reimund Vehling, Hannover; Elke Warmuth, Zossen

Zusammenfassung: *Eine Aufgabe für den Leistungskurs aus dem Abitur 2013 in Hessen wird vor dem Hintergrund der im Arbeitskreis Stochastik ausformulierten Ziele von Stochastikunterricht analysiert und überarbeitet. Einen wichtigen Angelpunkt der Überlegung bildet dabei der Modellbildungsgedanke, der für die Stochastik als Unterrichtsfach zentral erscheint und auch in dem angesprochenen Grundsatzpapier neben der Auflistung und Begründung von inhaltlichen Kompetenzen als eine von drei allgemeinen Orientierungen (Modellieren - Formale Strenge - Fehlvorstellungen) genannt wird.*

1 Einleitung

Während der Herbsttagung 2014 des Arbeitskreises Stochastik der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik setzten sich Teilnehmerinnen und Teilnehmer in kleinen Gruppen mit ausgewählten Aufgaben zur Stochastik des Zentralabiturs aus verschiedenen Bundesländern auseinander. Es wurden solche Aufgaben ausgewählt, die nach Meinung der Vorbereitungsgruppe hinreichend viel Potential für eine Weiterentwicklung beinhalteten. Ziel war es, die Aufgaben einer kritischen Analyse zu unterziehen und sie so zu überarbeiten, dass sie beispielhaft für die 2010 veröffentlichten Intentionen des Arbeitskreises bei der Umsetzung der Bildungsstandards sind (vgl. Biehler et al. 2010). Unsere Gruppe befasste sich mit der Aufgabe C2 für den Leistungskurs aus dem Abitur 2013 in Hessen (Hessisches Kultusministerium 2013).

1.1 Ziele eines Stochastikunterrichts im Wechsel der Zeit

Stochastik war vor 1970 auf Kombinatorik und elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung reduziert, Anfang der 1970er Jahre wurde die Wahrscheinlichkeitsrechnung als exemplarisches Teilgebiet der Mathematik forciert, das die Strukturmathematik illustrieren sollte. Heigl und Feuerpfeil (1977) ist ein gutes Beispiel für diese Art von Unterricht. Mit Beginn der 1980er traten in der Schulmathematik Anwendungen an die Stelle der favorisierten Mengenlehre und Strukturtheorie. Bald war damit auch die Idee der Modellbildung, idealerweise mit zyklischen Verbesserungen in einem Modellbildungskreislauf verbunden (siehe Blum 1985). Das brachte zunächst für die beschreibende Statistik, später auch für die beurteilende Statistik bessere Argumente, sodass diese Bereiche im schulischen Unterricht gegenüber der Wahrscheinlichkeitsrechnung aufgewertet wurden.
Nach 2000 spiegelte sich der Modellierungsgedanke auch in der Kompetenzorientierung des Unterrichts wider. Die stochastischen Begriffe sind ja zum Zweck der Lösung praktischer Probleme entwickelt worden und ihr Zweck lässt sich am besten im Anwendungskontext erkennen. So wird in den beschriebenen Kompetenzprofilen für die Bildungsstandards (Biehler et al. 2010) in drei (von sieben) Bereichen explizit Modellieren und in vier Bereichen Fragen stellen, beantworten bzw. die Antworten im Sachkontext interpretieren genannt.

Allerdings ist der Modellierungsgedanke im tatsächlichen Unterricht nicht immer angekommen. So stellen Eichler und Vogel (2010) fest, dass es bei vielen Aufgaben aus dem Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung eigentlich nur um Routinetechniken geht, wobei der Kontext allenfalls die Rolle einer leeren Hülle spielt: Man berechne, dass es höchstens 8 Erfolge bei 10 Versuchen gibt. Ob es um Schrauben mit bestimmten Ausmaßen (Ausschuss), Tore, oder Gewinn in einem Glücksspiel geht, ist ohne Belang. Auch wird das Modell explizit vorgegeben (es geht um eine Binomialverteilung). Mit der Modellierung ist aber meist keine Fragestellung verbunden; es bleibt offen, warum man eine solche Wahrscheinlichkeit ausrechnen soll und was man - wenn man sie berechnet hat - damit besser kann.

1.2 Die Ziele eines Stochastikunterrichts, wie sie im Grundsatzpapier festgehalten sind

Stellvertretend für Ziele eines Stochastikunterrichts dient uns das Grundsatzpapier „Leitidee Daten und Zufall für die Sekundarstufe II - Kompetenzprofile für die Bildungsstandards aus Sicht der Stochastik und ihrer Didaktik” (Biehler et al. 2010). Die Kompetenzen werden im angesprochenen Grundsatzpapier wie folgt angeführt:

1. Exemplarisches Planen von statistischen Erhebungen zu für die Lernenden bedeutsamen Fragestellungen

2. Verwenden von Methoden der beurteilenden Statistik (insbesondere Konfidenzintervallen und in Erweiterung auch Hypothesentests)
3. Modellieren mehrstufiger zufälliger Vorgänge
4. Modellieren zufälliger Vorgänge mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihrer charakteristischer Kennzahlen
5. Nutzen von Simulationen, um mit stochastischen Situationen zu experimentieren und Näherungslösungen in komplexeren Situationen zu gewinnen
6. Kennen von Grundphänomenen zum Gesetz der großen Zahlen
7. Modellieren von statistischen Trends und Zusammenhängen zweier Merkmale mithilfe von Funktionen.

Neben der Begründung dieser Kompetenzbereiche und der Beschreibung von Kernkompetenzen werden allgemeine Orientierungen für einen Stochastikunterricht beschrieben, worunter auch Modellbildung fällt, was für die vorliegende Analyse der Abituraufgabe besonders wichtig erscheint.

Man könnte die Ziele eines Stochastikunterrichts auch anhand anderer Aufsätze abarbeiten. Interessanterweise mögen sich die Benennungen unterscheiden, wenn sie jedoch durch Beispiele präzisiert werden, so läuft es wieder auf dasselbe hinaus, nämlich verschiedene Anwendungen von Stochastik verstehen und bewerten können. So etwa bei Hauer-Typpelt (2009), die eine „angemessene Grundvorstellung zu Wahrscheinlichkeit und Zufall entwickeln" will und als Beispiele u.a. anführt: Wahlprognosen richtig einschätzen zu können, mit medizinischen Testergebnissen rational umgehen zu können.

1.3 Zentral gestellte Abituraufgaben

Abituraufgaben haben eine besondere Funktion zu erfüllen - sie sollen in einer Prüfungssituation das Wissen und Können der Schülerinnen und Schüler am Ende ihrer Schulzeit angemessen testen. Gerade vor dem Hintergrund des ersten gemeinsamen Zentralabiturs von 14 Bundesländern nach den Bildungsstandards sind daher beispielgebende Aufgaben von nicht zu unterschätzender Bedeutung. Abituraufgaben haben an sich eine lenkende, den Unterricht gestaltende Kraft, das trifft in noch größerem Ausmaß auf zentral gestellte Aufgaben zu. Hier lohnt es sich besonders, auf die Ziele des Unterrichts zu achten. Sowohl den einmal formulierten (akzeptierten) Zielen als auch den einmal gestellten Aufgaben kommt eine Leitfunktion für die weitere Entwicklung von Schulunterricht zu. Deswegen ist es besonders wichtig, die bestehenden Aufgaben einer kritischen Analyse im Hinblick auf die Ziele zu unterziehen. Aufgaben an sich, also auch ohne die Funktion als Prüfungsaufgabe, kommt im Schulunterricht eine zentrale Rolle beim Begriffserwerb zu. In Abwandlung eines Sprichworts könnte man einer Lehrkraft die Frage stellen „Sag mir, welche Aufgaben Du stellst, und ich sage Dir, wie Dein Unterricht ist."

Um nun der genuinen Ausrichtung stochastischer Verfahren im Unterricht und dann auch in der Prüfung Ausdruck zu verleihen, scheint ein Konsens unter Didaktikern zu bestehen, dass der Modellierungsgedanke wesentlich ist. Allerdings gibt es für ein schriftliches Abitur doch eine erhebliche Erschwernis. Man kann - unter Prüfungsstress - wohl nicht eine so große Offenheit vorlegen; die Modellierung muss ‚wasserdicht' sein und soll in der Prüfungssituation keinesfalls hinterfragt werden müssen. Die Fragestellung einschließlich der Modellierung muss überdies von allen gleichermaßen klar verstanden werden können. Die nur kurze Tradition mit zentral gestellten Aufgaben im Abitur ist durch wiederkehrende Kritik gekennzeichnet. Fast jedes Jahr erscheinen Aufsätze mit einer Nachlese, wonach die Fragestellung zu kurz greift oder gar falsch ist (siehe etwa Davies 2009; Davies et al. 2008); nicht immer sind sich die Experten über die geäußerte Kritik einig.

Das allein illustriert bereits die Komplexität, eine Aufgabenstellung schriftlich so zu verfassen, dass es keine Missverständnisse darum geben wird und dass der Kontext die Fragen angemessen behandeln lässt. Der Kontext sollte einerseits gut zugänglich sein und nicht zu falschen Interpretationen verleiten, andererseits anfordernd genug, damit man auch in der Prüfungssituation erkennen kann, dass die gestellten Fragen gerade mit den gelernten Begriffen und Methoden bearbeitbar sind.
Wenn wir hier eine spezielle Aufgabe aus dem Umfeld der Qualitätskontrolle aufgreifen, so eigentlich nicht, um sie lediglich zu kritisieren, sondern um die Aufgabenstellung insbesondere mit bestimmten Zielen eines Stochastikunterrichts in Verbindung zu bringen. Erst eine stimmige Situation mit passender Modellierung erlaubt es, dem Prüfling die Ergebnisse sachgerecht zu interpretieren und einzuordnen, wie es in den Zielen eines Stochastikunterrichts nicht nur von Biehler et al. (2010) gefordert wird.

2 Originalaufgabe

Optische Rauchmelder enthalten als wichtiges Bauteil eine Fotozelle.

In einer Fabrik, die Fotozellen herstellt, wird jede Fotozelle auf Fehler untersucht. Bei dieser Untersuchung werden nacheinander und voneinander unabhängig bis zu drei Einzelkontrollen durchgeführt. Sofern bei einer der Einzelkontrollen eine fehlerhafte Fotozelle entdeckt wird, wird sie umgehend ausgesondert und nicht weiter überprüft. Eine intakte Zelle wird in keinem Fall ausgesondert. Bei den oben beschriebenen Einzelkontrollen ist die Fehlerquote ziemlich hoch, im Durchschnitt wird eine von fünf fehlerhaften Fotozellen nicht entdeckt.

Teilaufgabe 1.1 (2 BE)

Eine Fotozelle ist defekt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der sie innerhalb dieser Untersuchung erst bei der letzten, also der dritten Einzelkontrolle entdeckt und ausgesondert wird.

Teilaufgabe 1.2 (6 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass bei den Untersuchungen von zehn fehlerhaften Fotozellen folgende Ereignisse eintreten:
A: Es werden mindestens neun fehlerhafte Fotozellen entdeckt.
B: Unter den ersten fünf werden nur drei fehlerhafte Fotozellen und unter den restlichen fünf alle fehlerhaften Fotozellen entdeckt.

[Aufgabe 2 wird eingeleitet mit:] In Rauchmeldern wurde bisher nur eine Fotozelle eingebaut. Es wird nun überlegt, ob man die Zuverlässigkeit eines Rauchmelders dadurch verbessern könnte, dass man drei unabhängig voneinander arbeitende Fotozellen verwendet, die so geschaltet sind, dass erst dann Alarm ausgelöst wird, wenn zumindest zwei der drei Fotozellen eine Reaktion zeigen.
Es sei p die Wahrscheinlichkeit, dass eine Fotozelle im Falle von Rauchentwicklung eine Reaktion zeigt, und $P(p)$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein derartiger Rauchmelder im Falle von Rauchentwicklung Alarm auslöst.

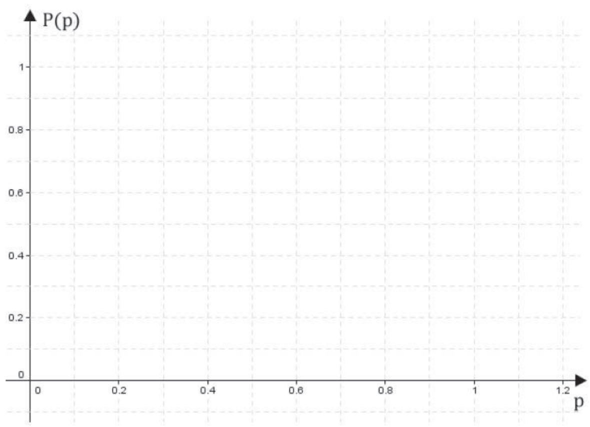
Teilaufgabe 2.1 (7 BE)

Berechnen Sie für $p = 0{,}3, p = 0{,}5$ und $p = 0{,}7$ die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten $P(p)$. Werten Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Zuverlässigkeit des Rauchmelders mit drei Fotozellen im Vergleich zu dem mit einer Fotozelle aus und formulieren Sie eine Vermutung, ob durch die beschriebene Maßnahme die Zuverlässigkeit der Rauchmelder verbessert wird.

Teilaufgabe 2.2 (3 BE)

Leiten Sie den Term $P(p) = -2p^3 + 3p^2$ her und skizzieren Sie den Graphen der Wahrscheinlichkeitsfunktion P für $p \in [0;1]$ im Koordinatensystem im Material.

Material



Teilaufgabe 2.3 (4 BE)

Erläutern Sie, welche Bedeutung die Funktion R (siehe Kasten) im Sachzusammenhang hat.
Erklären Sie, was in den Zeilen (1) bis (3) berechnet wird und deuten Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

R: $p \rightarrow R(p) = -2p^3 + 3p^2 - p$
(1) $R'(p) = -6p^2 + 6p - 1$
(2) $R'(p) = 0 \Rightarrow p_1 \approx 0{,}78$
(3) $R''(p_1) < 0$

Teilaufgabe 3 (8 BE)

Der neue Vorstand des Unternehmens verlagert aus Kostengründen einen Großteil der Produktion an einen anderen Standort. Dort zeigen sich bei der Massenfertigung der Rauchmelder große Probleme: Die ansonsten niedrige Ausschussquote von 3% steigt um ein Drittel an.
Der Produktionsleiter ergreift daraufhin Maßnahmen zur Senkung der Ausschussquote. Er möchte den Erfolg dieser Maßnahmen durch einen Test überprüfen, in dem 850 Rauchmelder kontrolliert werden.
Entwickeln Sie einen solchen Test mit einer Entscheidungsregel so, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art höchstens 5% beträgt.

3 Diskussion der Originalaufgabe mit Begründung der vorgeschlagenen Änderungen

3.1 Kontext der Aufgabe

Eingekleidete oder anwendungsorientierte Aufgaben sind seit einigen Jahren aus dem schriftlichen Abitur nicht mehr wegzudenken. Leider erfüllen sie in den seltensten Fällen das Ziel, Modellierungskompetenzen zu messen. Das kann man u.a. an der von Davies

(2008, 2009) ausgehenden Diskussion erkennen. Kritik an der Aufgabenstellung im Stochastikunterricht, die besonders in die Richtung Alibi-Modellierung geht, wird auch bei Eichler und Vogel (2010) deutlich. Generell besteht in der didaktischen Diskussion, wie sie auch im Arbeitskreis Stochastik der GDM geäußert wird, der Tenor, dass Modellierung ein offenes Desiderat an den Stochastikunterricht ist und insbesondere gut geeignete Aufgaben dazu rar sind. Die Modellierungselemente sind nämlich in der Regel vorgegeben und eine Modellkritik wird sehr selten verlangt. Oft ist sogar der Anwendungskontext fragwürdig. Uns ist bewusst, dass gute Modellierungsaufgaben im Zentralabitur nur schwer zu realisieren sind. Vielleicht ist es auch unmöglich. Gute Modellierungsaufgaben benötigen für die Bearbeitung ausreichend Zeit, passen nicht unbedingt in das operationalisierte Aufgabenformat und sind auch schwieriger zu korrigieren.

In der vorliegenden Aufgabe werden die Zuverlässigkeit von Bauelementen bzw. Geräten und die Unsicherheit bei der Qualitätskontrolle thematisiert. Beides sind realistische Fragestellungen. Allerdings ist es unrealistisch, dass bei einer Massenproduktion wie der von Fotozellen *jede* einzelne Zelle auf Fehler untersucht wird. Ebenso unrealistisch ist die Stichprobengröße in Teilaufgabe 3. Hier wird ein Stichprobenumfang von 850 vorausgesetzt, wobei das Ziel ist, zu erkennen, ob eine Veränderung im Ausschussanteil von 3 auf 4% erfolgt ist. Die Macht eines statistischen Tests (zum Niveau 5%), eine solche Änderung zu erkennen, wäre dann rund 45% – das bedeutet, man hätte weniger Chance als beim Münzwerfen Kopf zu erhalten, um diese Abweichung auch tatsächlich zu erkennen. Das hat jetzt weniger mit dem Kontext zu tun als einfach mit den Feinheiten des statistischen Testens. Intuitiv kann man davon ausgehen, dass man 1000 Daten benötigt, um einen Anteil auf einen bis drei Prozentpunkte genau zu schätzen (das hängt auch davon ab, wie groß der unbekannte Anteil ist; je näher bei 0,5, umso ungenauer die Schätzung im Sinne eines absoluten Fehlers; bei 0,03 ergibt sich etwas mehr als ein Prozentpunkt). Davon ist man beim vorgegebenen Stichprobenumfang entfernt und kann daher nicht im Mindesten die Fragestellung beantworten.

3.2 Struktur der Aufgabe

In den drei Teilaufgaben muss sich der Prüfling auf drei völlig unterschiedliche Situationen einstellen. In der ersten Teilaufgabe geht es um die Qualitätskontrolle der *einzelnen Fotozelle*, während in der zweiten Teilaufgabe die Zuverlässigkeit von *einzelnen Rauchmeldern* mit eingebauten Fotozellen und in der dritten – ohne Bezug zur zweiten – die Ausschussquote einer *ganzen Produktion von Rauchmeldern* Gegenstand der Untersuchung sind. Der Bruch in der Aufgabenstellung, wonach in den Teilaufgaben von ganz verschiedenen Situationen ausgegangen wird, ist Anlass für Missverständnisse. Er hat auch in veröffentlichten Lösungen von Personen, die mit den Anforderungen bestens vertraut sein sollten, zu Fehlern geführt (siehe Euler 2013). Dagegen sollte man in einer Prüfungsaufgabe solche Brüche mindestens klar formulieren. Es geht natürlich auch um Textverständnis und um die Fähigkeit, Text sinngemäß zu erfassen; aber die Fragestellung sollte ohne „Fallen" ausformuliert sein.

3.3 Anforderungen der Aufgabe

Zur Lösung der Teilaufgabe 1.1 muss dem Aufgabentext die verschlüsselte Wahrscheinlichkeitsangabe entnommen werden. Ein Baumdiagramm hilft bei der Lösung. Derartige Aufgaben sollten den Schülerinnen und Schülern aus dem Unterricht vertraut sein. Sie sind es gewohnt, die Einkleidung zu ignorieren. Das ist wohl Allgemeingut unter Lehrkräften und ein Teil der Bemühungen um Unterricht ist direkt darauf ausgerichtet, die richtige Struktur, sprich das richtige Referenzbeispiel zu entdecken. Das stellt auch einen Teil der Schwierigkeiten bei zentral gestellten Prüfungen dar, da dies nicht geübt werden kann. Es spiegelt sich auch in den höheren Durchfallquoten wider, wie dies gerade im österreichischen Vergleichsfall passiert ist, wo 2016 fast 22% bei der zentralen schriftlichen Matura durchgefallen sind.

Ob die Qualitätskontrolle brauchbar ist, hängt davon ab, wie viele defekte Zellen durchschlüpfen. Es interessiert also, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass eine defekte Zelle bei den maximal drei Tests nicht als defekt erkannt wird. Die Wahrscheinlichkeit ist trotz der mangelhaften Güte der einzelnen Prüfung (20% Wahrscheinlichkeit, dass dies nicht erkannt wird), immerhin auf $\frac{1}{5^3} = 0{,}008$ gesunken. Das wird erst in der zweiten Teilaufgabe zu berechnen sein (ohne dass es dort explizit genannt wird), gehört aber sinngemäß zur ersten Teilaufgabe.

Bei der Teilaufgabe 1.2 muss die Binomialverteilung als geeignetes Modell erkannt werden. Eine besondere Schwierigkeit der Aufgabe liegt darin, dass die Erfolgswahrscheinlichkeit für das *dreistufige* Prüfverfahren noch zu berechnen ist. Gelingt es nicht, ein sinnvolles Ereignis als „Erfolg" zu definieren und dessen Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dann hat die Schülerin oder der Schüler keinen Zugang zu dieser Teilaufgabe. Dem beugen wir in der geänderten

Aufgabe vor, indem wir in Teilaufgabe 1.1 b) die Wahrscheinlichkeit eines möglichen Erfolgsereignisses berechnen lassen und zum Vergleich das Ergebnis angeben. Es bleibt für den Prüfling immer noch das Problem zu erkennen, dass das dreistufige Prüfverfahren betrachtet werden muss.

Ist es noch interessant zu wissen, ob man wenigstens neun der defekten Zellen als defekt erkennt, so ist es gar nicht informativ, die Wahrscheinlichkeit zu kennen, ob zuerst von fünf defekten nur drei, dann von weiteren fünf defekten alle als defekt erkannt werden. Was soll man daraus ablesen? Es soll – wie in vielen anderen Abituraufgaben auch – (nur) getestet werden, ob der Prüfling ein zusammengesetztes Ereignis korrekt in einen Term übersetzen kann. Das Anliegen ist legitim, wenn der vorgetäuschte Sachkontext nicht da wäre. Es wird durch den Bezug auf den Kontext der Anschein erweckt, dass es im Rahmen der Qualitätskontrolle interessant und wichtig wäre, die Wahrscheinlichkeit zu wissen, ob bei den ersten fünf geprüften Stücken nur drei als fehlerhaft entdeckt werden und danach bei den zweiten fünf geprüften alle als fehlerhaft entdeckt werden. Das interessiert im Kontext überhaupt niemanden. Es wird eine bestimmte Anzahl überprüft und danach wird festgestellt, was mit den geprüften insgesamt los ist und wie das gefundene Ergebnis und dessen Wahrscheinlichkeit mit Annahmen (hier über die Ausschussquote) zu vereinbaren ist und welche Entscheidung man danach trifft. Wir haben die Frage nach der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B ersetzt durch Teilaufgabe 1.2 b), die eine Aussage über die Qualität des Prüfverfahrens beinhaltet.

In Teilaufgabe 2.1 sind die Zuverlässigkeiten von Rauchmeldern zu vergleichen: solche mit einer Fotozelle und solche, in die drei Fotozellen eingebaut sind, ausgehend von der Zuverlässigkeit p, mit der eine Fotozelle Rauch erkennt.

In drei Teilschritten soll der Prüfling zu einer Erkenntnis geführt werden. Zunächst ist dreimal dieselbe Rechnung mit verschiedenen Werten von p auszuführen. Die drei Werte sind wohl für eine Kurvendiskussion interessante Werte, bei 0,3 ist das Einzelsystem besser, bei 0,5 sind beide gleich, bei 0,7 ist das Dreier-System besser. Aus zuverlässigkeitstheoretischer Sicht sind das alles Werte, die völlig uninteressant sind. Fotozellen mit einer derart schlechten Zuverlässigkeit werden hoffentlich nicht in einen Rauchmelder eingebaut.
Auf der Grundlage der drei Ergebnisse soll der Prüfling eine Vermutung über die Wirkung des Einbaus von drei Fotozellen äußern, die aber nicht begründet werden muss. Danach soll der allgemeine Term für die Zuverlässigkeit des Rauchmelders verifiziert werden. Ein viertes Mal sind also analoge Überlegungen wie bei den drei einzelnen Werten anzustellen. Das *Skizzieren* eines Graphen ist keine Aufgabe, mit der für die Stochastik typische Kompetenzen überprüft werden. Die Bedeutung der Funktion R herauszufinden, erfordert hingegen schon Verständnis der stochastischen Komponenten des Sachverhalts. Gelingt es dem Prfling allerdings nicht, diese Bedeutung zu ermitteln, dann kann sie oder er auch die abschließende Aufgabe von 2.3 nicht lösen. Das vorangehende Erklären des Kasteninhalts ist ebenfalls keine Aufgabe, mit der für die Stochastik typische Kompetenzen überprüft werden.

Der im Kasten ermittelte Wert p, für den R maximal wird, ist zuverlässigkeitstechnisch uninteressant; er befindet sich im Bereich der unakzeptablen Zuverlässigkeitswerte. Außerdem ist dort nur der maximale Abstand zwischen den beiden Systemen in punkto Zuverlässigkeit erreicht, das sagt aber nichts aus über den erreichten Status an Zuverlässigkeit. Die Zuverlässigkeit des Dreier-Systems (mit der angegebenen Wirkungsweise) ist erst bei Werten von $p \geq 0,95$ im akzeptablen Bereich (ist dann größer als 0,9928 und die Fehlerrate liegt unter 1%). Die Betrachtung der Differenz der Zuverlässigkeiten schiebt den Fokus weg von den erreichten Zuverlässigkeiten, die eigentlich wichtig sind. Die Frage ist, lohnt sich eine Verbesserung, wenn ein System sowieso schon gut ist. Bei 0,95 für das Einzelsystem lohnt sich natürlich eine Verbesserung auf mehr als 0,99.

In der vorgeschlagenen Veränderung dieser Teilaufgabe sollen die Schülerinnen und Schüler zunächst für eine sinnvolle Zuverlässigkeit einer Fotozelle ($p = 0,9$) die Zuverlässigkeit des Rauchmelders berechnen (Teilaufgabe 2.1 a)) und dann durch Wiederholung der Überlegungen mit einem beliebigen p den allgemeinen Term verifizieren (Teilaufgabe 2.1 b)). Teilaufgabe 2.1 c) behandelt die zuverlässigkeitstechnisch wichtige Frage, welche Zuverlässigkeit die Fotozellen haben müssen, um eine vorgegebene Zuverlässigkeit des Rauchmelders zu erreichen. Vom Prüfling wird erwartet zu erkennen, dass die Zuverlässigkeit des Rauchmelders monoton wachsend von der Zuverlässigkeit der eingebauten Fotozellen abhängt. Mit dem Ergebnis von Teilaufgabe 2.1 a) ist ein Ausgangspunkt gegeben, um p in Hundertstelschritten zu erhöhen. Aber auch ohne Nutzung der Teilaufgabe 2.1 a) kann der Prüfling durch systematische Suche zum Erfolg kommen.

Teilaufgabe 2.2. in der vorgeschlagenen Veränderung greift den Gedanken der Originalaufgabe 2.3 auf. Dazu wird aber der Graph der Funktion *R*, welche die Differenz aus der Zuverlässigkeit eines Rauchmelders mit drei Fotozellen und der einer einzelnen Fotozelle beschreibt, vorgegeben und der Schwerpunkt auf die inhaltliche Analyse gelegt. Geprüft wird damit die Kompetenz, die Funktion im Sachkontext richtig zu interpretieren, aus dem Graphen Informationen zu entnehmen und diese wiederum in den stochastischen Kontext zurück zu übersetzen. Teilaufgabe 2.2 b) zielt auf die Erkenntnis, dass ein hoher Zuwachs an Zuverlässigkeit noch nichts über den erreichten Zuverlässigkeitswert aussagt. Dieser muss vom Prüfling berechnet und beurteilt werden.

Die Teilaufgabe 3 verlangt vom Prüfling das mechanische Abarbeiten eines Signifikanztests. Es wird nicht angenommen, dass es sich um eine zufällige Stichprobe handelt. Bei der Rechnung muss die Binomialverteilung durch eine Normalverteilung approximiert werden. Es handelt sich um eine Standardaufgabe. In der vorgeschlagenen Veränderung der Teilaufgabe 3 ist zunächst die Ausschussquote aus der *zufälligen* Stichprobe zu schätzen. Anstelle des Signifikanztests wird vom Prüfling eine Bewertung auf der Grundlage eines zu bestimmenden Konfidenzintervalls verlangt. Außerdem ist ergänzend dazu einen Schluss „von der Grundgesamtheit zur Stichprobe“ zu vollziehen. Bei den Teilaufgaben b) und c) ist die Normalapproximation der Binomialverteilung anzuwenden.

3.4 Sprache

Die Länge des Textes erscheint noch vertretbar, bietet jedoch aus sprachlicher und inhaltlicher Perspektive eine Reihe von Vereinfachungsmöglichkeiten. Vor allem aber sind mathematische Ungenauigkeiten bzw. Fehler enthalten.
Aufgabentexte sollten knapp gehalten und auf die wesentlichen Informationen beschränkt sein; komplizierte Satzkonstruktionen sind zu vermeiden. Diese Anforderungen erfüllt der einleitende Text zu Teilaufgabe 2.1 nicht durchgehend:

> In Rauchmeldern wurde bisher nur eine Fotozelle eingebaut. Es wird nun überlegt, ob man die Zuverlässigkeit eines Rauchmelders dadurch verbessern könnte, dass man drei unabhängig voneinander arbeitende Fotozellen verwendet, die so geschaltet sind, dass erst dann Alarm ausgelöst wird, wenn zumindest zwei der drei Fotozellen eine Reaktion zeigen.

Der zweite Satz beinhaltet fünf geschachtelte Nebensätze. Der Änderungsvorschlag ist sehr viel einfacher strukturiert und enthält dieselbe relevante Information.

> Zur Verbesserung der Zuverlässigkeit eines Rauchmelders sollen nun drei unabhängig voneinander arbeitende Fotozellen eingebaut werden. Ein Alarm wird ausgelöst, wenn zumindest zwei der drei Fotozellen eine Reaktion zeigen.

Zu den mathematischen Ungenauigkeiten zählt vor allem die unpräzise Behandlung von Einzelkontrollen und mehrstufigen Kontrollen – letztere werden im Aufgabentext „Untersuchungen“ genannt. Dazu kommt, dass Annahmen (Fotozelle ist defekt, fehlerhafte Fotozellen) nicht klar als solche gekennzeichnet sind. Man muss sich vergegenwärtigen, dass der Prüfling in einer Stresssituation erstmalig mit dem Sachverhalt konfrontiert wird und nicht durch unklare Darstellung desselben verunsichert werden soll.

Die Formulierung „im Durchschnitt wird eine von fünf fehlerhaften Fotozellen nicht entdeckt“ ist eine nicht normierte, verkürzte Information über eine relative Häufigkeit. Es ist nicht selbstverständlich, dass diese Information zur Modellierung herangezogen werden soll.

Regelrecht falsch ist im einleitenden Text die Aussage „voneinander unabhängig bis zu drei Einzelkontrollen“ . Die Einzelkontrollen *einer* Fotozelle sind selbstverständlich *nicht* voneinander unabhängig. Wenn nämlich bei der ersten Kontrolle die Fotozelle als defekt erkannt wird, findet keine weitere Kontrolle statt.

Als stochastisch unabhängig voneinander hingegen müssen die Kontrollvorgänge bei verschiedenen Fotozellen angesehen werden. Diese Annahme wird nicht formuliert und auch nicht im Aufgabentext diskutiert.

4 Vorschläge zur Verbesserung der Aufgabe

Auf die Angabe von Bewertungseinheiten haben wir verzichtet, da es uns vorrangig um eine inhaltliche Auseinandersetzung mit der Aufgabe geht. In den Schlussbemerkungen werden wir eine orientierende Zuordnung zu den Anforderungsbereichen vornehmen.
Wir schlagen folgende Aufgabenstellung vor:

[Aufgabe 1:] Optische Rauchmelder enthalten als wichtiges Bauteil eine Fotozelle. Nach der Produktion werden zufällig ausgewählte Fotozellen auf Fehler untersucht. Bei dieser Untersuchung werden an jeder dieser Fotozellen nacheinander bis zu drei Einzelkontrollen durchgeführt.

Sofern bei einer der Einzelkontrollen eine fehlerhafte Fotozelle als defekt erkannt wird, wird sie umgehend ausgesondert und nicht weiter überprüft. Eine intakte Zelle wird in keinem Fall ausgesondert.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0,20$ wird bei einer Einzelkontrolle eine defekte Fotozelle nicht als defekt erkannt. Sollte eine zweite (oder gar dritte) Kontrolle erforderlich sein, so beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine defekte Fotozelle in diesem Schritt nicht als defekt erkannt wird, 0,2 (genauso hoch wie bei der ersten Kontrolle).

Die Kontrollen verschiedener Fotozellen werden als unabhängig voneinander angenommen.

Teilaufgabe 1.1

Angenommen, eine Fotozelle ist defekt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der sie innerhalb des beschriebenen Prüfverfahrens erst bei der dritten Einzelkontrolle als defekt erkannt und ausgesondert wird.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der sie innerhalb des beschriebenen Prüfverfahrens überhaupt als defekt erkannt wird. (Zur Kontrolle: 0,992)

Teilaufgabe 1.2

a) Angenommen, es werden 10 defekte Fotozellen mit dem (maximal) dreistufigen Prüfverfahren untersucht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses A:
A: Es werden mindestens neun Fotozellen als defekt erkannt.

b) In der Tagesproduktion von 2000 Fotozellen seien genau 5% defekt. Alle Fotozellen werden mit dem beschriebenen Prüfverfahren kontrolliert.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B:
B: Bei der Kontrolle werden mehr als 2 defekte Fotozellen nicht als defekt erkannt.

[Aufgabe 2 wird eingeleitet mit:] Zur Verbesserung der Zuverlässigkeit eines Rauchmelders sollen nun drei unabhängig voneinander arbeitende Fotozellen eingebaut werden. Ein Alarm wird ausgelöst, wenn zumindest zwei der drei Fotozellen eine Reaktion zeigen.
Es sei p die Wahrscheinlichkeit, dass eine Fotozelle im Falle von Rauchentwicklung eine Reaktion zeigt, und $P(p)$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein derartiger Rauchmelder im Falle von Rauchentwicklung Alarm auslöst.
Die Wahrscheinlichkeiten p und $P(p)$ heißen Zuverlässigkeit der Fotozelle bzw. des Rauchmelders.

Teilaufgabe 2.1

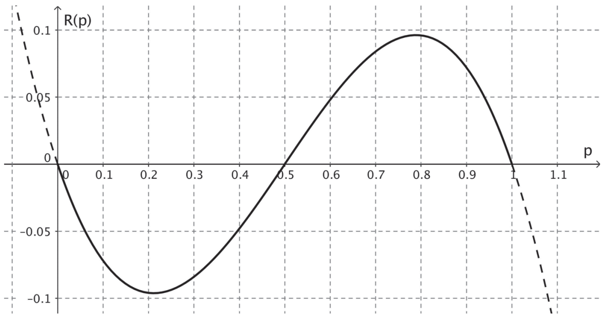
a) Berechnen Sie für $p = 0,9$ die Wahrscheinlichkeit $P(p)$.

b) Zeigen Sie, dass gilt: $P(p) = -2p^3 + 3p^2$.

c) Ermitteln Sie auf zwei Dezimalstellen genau die Wahrscheinlichkeit p, mit der jede einzelne Fotozelle auf Rauch reagieren muss, damit der Rauchmelder mit drei Fotozellen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% Alarm auslöst?

Teilaufgabe 2.2

In der folgenden Abbildung wird der Graph einer Funktion R dargestellt. Diese Funktion beschreibt (für $0 \leq p \leq 1$) die Differenz aus der Zuverlässigkeit eines Rauchmelders mit drei Fotozellen und der einer einzelnen Fotozelle.



Lösen Sie mithilfe des Graphen die folgenden Aufgaben und geben Sie jeweils Näherungswerte für p an.

a) Ermitteln Sie jene Werte für p, für die der Einbau von drei Fotozellen einen Zuwachs an Zuverlässigkeit bringt.

b) Bestimmen Sie jenen Wert für p für einzelne Fotozellen, für welchen der Zuwachs maximal ist. Berechnen Sie für dieses p die Zuverlässigkeit eines Rauchmelders mit drei solcher Fotozellen.
Beurteilen Sie die mit diesem p erreichte Zuverlässigkeit des Rauchmelders.

Teilaufgabe 3

Der neue Vorstand eines Unternehmens verlagert aus Kostengründen einen Großteil der Produktion an einen anderen Standort. Dort zeigen sich bei der Massenfertigung der Fotozellen große Probleme: Die ansonsten niedrige Ausschussquote von 3% steigt um ein Drittel an.

Der Produktionsleiter ergreift daraufhin Maßnahmen zur Senkung der Ausschussquote. Er möchte den Erfolg dieser Maßnahmen überprüfen. Dazu werden 2000 zufällig ausgesuchte Fotozellen kontrolliert. Es stellt sich heraus, dass 59 Fotozellen defekt sind.

a) Ermitteln Sie aus dieser Stichprobe einen Schätzwert für die Ausschussquote.

b) Beurteilen Sie mithilfe eines Vertrauensintervalls zur Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95%, ob die Aussage, dass die Maßnahmen Erfolg hatten (und der Ausschussanteil unter 4% gesunken ist) mit dem Ergebnis der Stichprobe verträglich ist.

c) Angenommen, die Ausschussquote würde $p = 4\%$ betragen. Ermitteln Sie ein um diesen Wert von p symmetrisch liegendes Intervall, in dem ca. 99% aller Stichprobenergebnisse liegen sollen (d.h., mit Wahrscheinlichkeit 0,99 liegt die Ausschussquote einer Stichprobe in diesem Intervall).

5 Schlussbemerkungen

Wir haben uns bemüht, eine einfache und vor allem präzise Sprache zu wählen und die Modellannahmen jeweils sauber zu benennen.

Bei den vorgeschlagenen inhaltlichen Änderungen ging es uns zunächst darum, den Sachkontext ernst zu nehmen und in diesem Kontext sinnvolle Fragestellungen zu formulieren, die sich an den in Biehler et al. (2010) formulierten Kompetenzen orientieren, die im Folgenden zitiert werden.

Teilaufgabe 1 thematisiert mehrstufige zufällige Vorgänge (1.1) und das Modell der Binomialverteilung (1.2). Der Prüfling muss die Modellannahmen aus dem Aufgabentext (für 1.1) bzw. auch aus der vorigen Rechnung (für 1.2) entnehmen und sinnvoll anwenden. Dies entspricht den Kompetenzen 3 (Schülerinnen und Schüler modellieren mehrstufige zufällige Vorgänge.) und 4 (Schülerinnen und Schüler modellieren mehrstufige zufällige Vorgänge mithilfe von Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihrer charakteristischer Kennzahlen.).

Teilaufgabe 1.1 ist dem Anforderungsbereich I, Teilaufgabe 1.2 dem Anforderungsbereich II zuzuordnen. Die Anforderungsbereiche I bis III entsprechen der Nomenklatur der KMK, wie sie in den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für die allgemeine Hochschulreife" dargelegt ist (siehe KMK (2012)). Den Anforderungsbereichen werden folgende grundlegende Eigenschaften zugeschrieben: Reproduzieren (Anforderungsbereich I), Zusammenhänge herstellen (Anforderungsbereich II) und Verallgemeinern und Reflektieren (Anforderungsbereich III)

Teilaufgabe 2 beinhaltet ein vom Parameter p abhängiges Modell der Zuverlässigkeit eines Rauchmelders, also ist wiederum Kompetenz 3 angesprochen. Durch die Abhängigkeit vom Parameter kommen funktionale Betrachtungen ins Spiel, die in der vorgeschlagenen Form selbstverständlich Gegenstand einer Stochastikaufgabe sein dürfen. Teilaufgabe 2.1 c) erfordert kontextorientierte inhaltliche Überlegungen.

Die Teilaufgaben 2.1 a) und 2.2 a) sind dem Anforderungsbereich I, die Teilaufgaben 2.1 b) und 2.1 c) sind dem Anforderungsbereich II zuzuordnen. Die Teilaufgabe 2.2 b) beinhaltet Elemente des Anforderungsbereichs III.

Die vorgeschlagene Änderung der Teilaufgabe 3 entspricht dem Anliegen unseres Arbeitskreises, in der beurteilenden Statistik den Schwerpunkt auf Konfidenzintervalle zu legen (Kompetenz 2). Zur umfassenderen Behandlung der Sachsituation wurde die Aufgabe in drei Teile gegliedert. Sie beginnt mit einer Punktschätzung für p, baut diese zu einer Intervallschätzung aus und ergänzt die Betrachtung durch einen (umgekehrten) Schluss von der Grundgesamtheit auf die Stichprobe.

Eigentlich wäre in der vorliegenden Situation ein *einseitiges* Konfidenzintervall angemessen. Dies wird in der Regel aber im Unterricht nicht behandelt. Wir sind den Kompromiss eingegangen, um den Kontext nicht völlig zu ändern. Bei der Neukonzeption solcher Aufgaben müssten diesbezügliche Fragen beachtet werden.
Die Teilaufgaben würden wir folgendermaßen den Anforderungsbereichen zuordnen: 3 a) ordnen wir I zu, 3 b) ordnen wir III zu, 3 c) ordnen wir II zu.

Literatur

Biehler, R., Eichler, A., Engel, J. und Warmuth, E. (2010): Leitidee Daten und Zufall für die Sekundarstufe II – Kompetenzprofile für die Bildungsstandards aus der Sicht der Stochastik und ihrer Didaktik. AK Stochastik der GDM. Stellungnahme zu der Entwicklung von Bildungsstandards für die Sekundarstufe II. Aktuelles, Stochastik in der Schule: `http://stochastik-in-der-schule.de/aktuelles.htm`, Zugriff 2016-08-03.

Hessisches Kultusministerium (2013): Abitur 2013 Mathematik LK Stochastik Aufgabe C2. In: Abitur-Prüfungsaufgaben Gymnasium Hessen/Mathematik Leistungskurs 2014. Freising: Stark Verlagsgesellschaft. `http://www.abiturloesung.de/abitur/Hessen`, Zugriff 2016-08-03.

Blum, W. (1985): Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. Mathematische Semesterberichte, 32(2), 195-232.

Davies, P. L. (2009): Einige grundsätzliche Überlegungen zu zwei Abituraufgaben. In: *Stochastik in der Schule*, 29 (2), 2–7.

Davies, L., Dette, H., Diepenbrock, F.R. und Krämer, W. (2008): Ministerium bei der Erstellung von Mathe-Aufgaben im Zentralabitur überfordert? Bildungsklick. `https://`

bildungsklick.de/schule/meldung/ministerium-bei-der-erstellung-von-mathe-aufgaben-im-zentralabitur-ueberfordert/, Zugriff 2016-07-02.

Eichler, A. und Vogel, M. (2010): Daten und Zufall als einen Leitidee. Aufsatz präsentiert an der DAG-Stat2010, Dortmund, 25.03.2010.

Euler, S. (2013): Lösung der Abituraufgabe C2 aus dem zentralen Abitur in Hessen 2013. Abiturloesung.de. www.abiturloesung.de/al_upload/Hessen/Gymnasium/pdf/LK_2013_C2.pdf, Zugriff 2016-07-02.

Hauer-Typpelt, P. (2009): Angemessene Grundvorstellung zu Wahrscheinlichkeit und Zufall entwickeln - Vorschläge für den Stochastikunterricht. In: *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft* (ÖMG), 42, 53-65.

Heigl, F. und Feuerpfeil, J. (1977): Grundkurs Stochastik. München: Bayerischer Schulbuchverlag.

Zentralmatura 2016: Die alte Angst vor der Mathematik. Tiroler Tageszeitung. 20. Juni 2016. www.tt.com/politik/innenpolitik/11688789-91/zentralmatura-2016-die-alte-angst-vor-der-mathematik.csp, Zugriff 2016-07-02.

KMK - Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.) (2012). Bildungsstandards im Fach Mathematik für die allgemeine Hochschulreife. Beschluss der KMK vom 18.10.2012. Bonn: KMK.

Anschrift der Verfasser

Manfred Borovcnik
Institut für Statistik
Alpen-Adria-Universität Klagenfurt
9020 Klagenfurt, Österreich
manfred.borovcnik@aau.at

Reimund Vehling
Studienseminar Hannover I
vehling@icloud.com

Elke Warmuth
Drosselgasse 5
15806 Zossen
ew@suljee.de